Μαθηματικά (Άλγεβρα)

01-06-2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 31 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α.** Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου.

β. Σελίδα 87 σχολικού βιβλίου.

Α3. **α.** Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}.$

Β2. Είναι:

- $f'(x)=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}.$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=5$$

Αφού η f' είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με συντελεστή δευτεροβάθμιου όρου το x^2, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)=\frac{8}{3}$	$\searrow$	$f(5)=-8$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το:

$$f(1)=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο για $x=5$ το:

$$f(5)=\frac{1}{3}\cdot125-3\cdot25+5\cdot5+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=42-50=-8$$

Β3. Η ζητούμενη ευθεία είναι της μορφής $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, όπου:

$$\lambda=f'(0)=0^2-6\cdot 0+5=5$$

Άρα $\varepsilon: y=5x+\beta$.

Είναι $f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-3\cdot 0^2+5\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Άρα το σημείο επαφής της C_f με την (ε) είναι το $\Sigma\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

Τότε $\Sigma\left(0,\frac{1}{3}\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{3}$.

Επομένως $y=5x+\frac{1}{3}$.

Β4. Από τον ορισμό της παραγώγου στο -1 προκύπτει ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=1+6+5=12$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2}=\frac{8}{2}=4$.

Γ2. Είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}$, οπότε:

$$0{,}2=\frac{4}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow|\bar{x}|=\frac{4}{0{,}2}\Leftrightarrow|\bar{x}|=20\Leftrightarrow\bar{x}=-20 \text{ ή } \bar{x}=20$$

Αν οι γνωστές θερμοκρασίες είναι 14, 16, 18, 22 και α η $5^{η}$, τότε:

Για $\bar{x}=-20$:

$$\bar{x}=\frac{14+16+18+22+\alpha}{5}\Leftrightarrow -20=\frac{70+\alpha}{5}$$
$$\Leftrightarrow -100=70+\alpha\Leftrightarrow\alpha=-170$$

που είναι παράλογο.

Άρα $\bar{x}=20$.

Γ3. Έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{22+18+(20+\kappa)+14+16}{5}\Leftrightarrow 20=\frac{90+\kappa}{5}\Leftrightarrow 90+\kappa=100\Leftrightarrow\kappa=10$$

Τότε οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι:

14, 16, 18, 22, 30

και η διάμεσος είναι η $3^{η}$ παρατήρηση, δηλαδή $\delta=18$.

Γ4. Αν x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 είναι οι αρχικές παρατηρήσεις, τότε:

$$y_i=x_i+\frac{10}{100}\cdot x_i=x_i+0{,}1\cdot x_i=1{,}1\cdot x_i,\ \text{με } i=1,2,3,4,5$$

είναι οι νέες παρατηρήσεις που προκύπτουν μετά την αύξηση κατά 10% των παλιών.

Έτσι προκύπτουν:

- $\bar{y}=1{,}1\cdot\bar{x}$
- $s_y=1{,}1\cdot s$

Τότε $CV_y=\dfrac{1{,}1\cdot s}{1{,}1\cdot\bar{x}}=\dfrac{s}{\bar{x}}=CV=20\%$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο, προκύπτει ότι:

$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2$$

Δηλαδή:

$$x^2+y^2=10^2\Leftrightarrow y^2=100-x^2\overset{y>0}{\Leftrightarrow}y=\sqrt{100-x^2}$$

Για το πεδίο ορισμού:

Αφού $(OA)=x>0$ και $(OB)=y>0$:

$$\begin{cases}y>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}100-x^2>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2<100\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|<10\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10<x<10\\x>0\end{cases}$$

Δηλαδή $x\in(0,10)$.

(Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι το x παριστάνει μήκος, οπότε $x>0$ και είναι μία από τις κάθετες πλευρές, άρα είναι μικρότερη από την υποτείνουσα)

Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το $A=(0,10)$.

Δ2. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot\left(100-x^2\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}},\ x\in(0,10)$$

Άρα $f'(8)=-\dfrac{8}{\sqrt{100-8^2}}=-\dfrac{8}{\sqrt{100-64}}=-\dfrac{8}{\sqrt{36}}=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}$.

Δ3. Είναι:

$$\lim_{x\to6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim_{x\to6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim_{x\to6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2-8^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to6}\frac{-(x-6)(x+6)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{-(x+6)}{\sqrt{100-x^2}+8}=-\frac{(6+6)}{\sqrt{100-6^2}+8}=-\frac{12}{8+8}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$$

Δ4. Είναι $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$, για κάθε $x \in (0,10)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι είναι:

$$2{,}3 < 2{,}8 < 3{,}5$$

Δηλαδή:

$$x_1 < x_3 < x_2 \overset{f \searrow (0,10)}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$